Le Misure

In tutte le soluzioni si farà ricorso alla notazione scientifica dei numeri, basata sul significato del sistema decimale e posizionale.

Esercizi svolti dal prof. Gianluigi Trivia

Lunghezza

ESERCIZIO 1. Una navetta spaziale orbita intorno alla Terra a un'altitudine di $300\,km$. Quanto vale questa distanza (a) in miglia e (b) in millimetri?

SOLUZIONE. Caso (a): Si utilizza il fattore di conversione metro-miglio, $1\,miglio = 1,609\,km$, per cui si ha

$$300\,km = \frac{300\,km}{1,609\frac{Km}{miglio}} = 186,45\,miglia$$

Caso (b): Attraverso la ben nota equivalenza, $1\,km = 10^6\,mm$, si ottiene, nella notazione scientifica

$$300\,km = 300 \cdot 10^6\,mm = 3 \cdot 10^8 mm$$

ESERCIZIO 2. Il micrometro $(10^{-6}\,m = 1\mu m)$ è spesso chiamato micron. (a) Quanti micron fanno $1.0\,km$? (b) Quale frazione di un centimetro è uguale a $1\mu m$? (c) Quanti micron ci sono in $1.0\,yd$?

SOLUZIONE. Caso (a): Essendo $1\,m = 10^6\,\mu m$ e $1\,km = 10^3\,m$, si avrà che $1.0\,km = 1.0 \cdot 10^9\,\mu m$

Caso (b): Essendo $1\,m = 10^6\,\mu m$ e $1\,cm = 10^{-2}\,m$, si avrà $1\,\mu m = 10^{-4}\,cm$

Caso (c): Essendo $1\,yd = 0.9144\,m$ e $1\,m = 10^6\,\mu m$, si avrà $1\,yd = 0.9144 \cdot 10^6\,\mu m$

ESERCIZIO 3. La Terra è assimilabile ad una sfera di raggio $6.37 \cdot 10^6\,m$. (a) Qual è la sua circonferenza in chilometri? (b) Qual è l'area della sua superficie in chilometri quadrati? (c) Qual è il suo volume in chilometri cubi?

SOLUZIONE. Caso (a): La circonferenza è uguale a $2\pi r = 6.28 \cdot 6.37 \cdot 10^6\,m$; ma, come visto, $1\,km = 10^3\,m$, per cui la circonferenza misurerà $crf = 6.28 \cdot \frac{6.37 \cdot 10^6\,m}{10^3\,\frac{m}{km}} = 40024\,km$.

Caso (b): L'area della superficie di una sfera vale $A = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot \left(6.37 \cdot 10^3\,km\right)^2 = 5.10 \cdot 10^8\,km^2$

Caso (c): Il volume di una sfera è $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(6.37 \cdot 10^3\,km\right)^3 = 1.08 \cdot 10^{12}\,km^3$.

ESERCIZIO 4. Una unità di misura usata per i terreni agricoli è l'ettaro, definito come $10^4\,m^2$. Una miniera di carbone a cielo aperto consuma ogni anno 75 ettari di terra, per una profondità di $26\,m$. Qual è il volume di terra corrispondente in kilometri cubi ?

SOLUZIONE. Il volume di un solido retto con due basi parallele è sempre dato dal prodotto dell'area della base per la sua altezza. Ciò consente di pensare ad una superficie di base di forma qualunque. L'area di base è pari a $75\,ettari = 75 \cdot 10^4\,m^2$. Segue che $V = A_b \cdot h = 75 \cdot 10^4\,m^2 \cdot 26\,m = 1.95 \cdot 10^7\,m^3$; ma $1\,km^3 = 10^9\,m^3$, pertanto $V = 1.95 \cdot 10^{-2}\,km^3$.

ESERCIZIO 5. L'Antartide è di forma semicircolare, con raggio di $2000\,km$. Lo spessore medio dello strato di ghiaccio che lo ricopre è di $3000\,m$. Quanti centimetri cubi di ghiaccio contiene l'Antartide? (Si trascuri la curvatura della Terra).

SOLUZIONE. Non dovendo considerare la curvatura della Terra, possiamo supporre la forma del solido come quella mostrata in figura. Il volume di ogni solido a due basi parallele è dato dal prodotto della sua area di base per l'altezza. Pertanto, sapendo che $2000\,km = 2 \cdot 10^8\,cm$ e $3000\,m = 3 \cdot 10^5\,cm$,:

$$V = A_b \cdot h = \frac{\pi r^2}{2} \cdot h = \frac{\pi \left(2 \cdot 10^8\,cm\right)^2 \cdot 3 \cdot 10^5\,cm}{2} = 1.9 \cdot 10^{22}\,cm^3$$

ESERCIZIO 6. Una tipica zolletta di zucchero è un cubo con lo spigolo di $1\,cm$. Quale sarebbe la lunghezza dello spigolo di una scatola cubica che possa contenere una «mole» di zucchero, ovvero un numero di zollette pari al numero di Avogadro? $(1\,mole = 6.02 \cdot 10^{23}\,unità\,elementari)$.

SOLUZIONE. Soluzione: Se la scatola contiene $6.02\cdot10^{23}$ zollette di zucchero, il volume di tutte le zollette sarà $6.02\cdot10^{23}\,cm^3$. Supponiamo che tale scatola sia di forma cubica, sapendo che il volume del cubo è $V=l^3$, dove l è lo spigolo, si ha:

$$l=\sqrt[3]{6.02\cdot10^{23}\,cm^3}=8.44\cdot10^7\,cm=844\,km$$

ESERCIZIO 7. Le unità di misura astronomiche sono molto più grandi di quelle di uso comune. $1\,UA=150\cdot10^6\,km$ e rappresenta la distanza media Terra-Sole. La distanza alla quale $1\,UA$ sottende un arco la cui misura angolare è esattamente un secondo di grado è detta parsec (pc). Un anno luce ($a.l.$) è la distanza che la luce, viaggiando nel vuoto a una velocità di circa $300000\,km/s$, coprirebbe in un anno terrestre. (a) Esprimi la distanza dalla Terra al Sole in parsec e anni-luce. (b) Esprimi $1\,pc$ e $1\,a.l.$ in chilometri.

SOLUZIONE. Caso (a): Come si vede nella figura, non in scala, il triangolo è isoscele, con un angolo al vertice di un secondo di grado. In un triangolo isoscele l'altezza relativa alla base è anche mediana e bisettrice. Il triangolo AHC è rettangolo, e dalla trigoniometria sappiamo che $distanza terra-sole=AB=2AH=2\cdot AC\cdot\sin0,5''=2\cdot1\,pc\cdot\sin0,5''=4.85\cdot10^{-6}\,pc$.
$1\,a.l.=300000\,\frac{km}{s}\cdot(365.25\cdot24\cdot3600)\,sec=9.47\cdot10^{12}\,km$; quindi $1\,UA=\frac{150\cdot10^6\,km}{9.47\cdot10^{12}}=1.58\cdot10^{-5}\,a.l.$

Caso (b): Sappiamo che un anno è formato da $365,25$ giorni; un giorno da $24\,h$ e $1\,h=3600\,s$. Pertanto, essendo la distanza percorsa uguale alla velocità per il tempo impiegato, si ha $1\,a.l.=300000\,\frac{km}{s}\cdot(365.25\cdot24\cdot3600)\,sec=9.47\cdot10^{12}\,km$
$1\,pc=\frac{AH}{\sin0.5''}=\frac{75\cdot10^6\,km}{\sin0.5''}=3.1\cdot10^{13}\,km$

ESERCIZIO 8. Durante un'eclissi totale di sole, l'immagine del Sole è quasi esattamente coperta da quella della Luna. Ammettendo che la distanza del Sole sia circa 400 volte quella della Luna, (a) trovare il rapporto tra i loro diametri. (b) Qual è il rapporto tra i loro volumi ?

SOLUZIONE. Caso (a): Osservando la figura, si può costruire la proporzione, basandosi sulla similitudine dei triangoli: $\phi_{sole}:\phi_{luna}=d_{T-S}:d_{T-L}$; da ciò si ottiene, sapendo che la $d_{T-S}=400\cdot d_{T-L}$, $\frac{\phi_{sole}}{\phi_{luna}}=400$

Caso (b): Considerando i corpi celesti come sferici, il rapporto tra i loro volumi sarà $\frac{V_{sole}}{V_{luna}}=(400)^3=6.4\cdot10^6$

ESERCIZIO 9. Il chilogrammo campione ha la forma di un cilindro circolare retto con l'altezza uguale al diametro. Dimostrare che, per un cilindro circolare di un determinato volume, questa uguaglianza garantisce la minima area superficiale, rendendo così minimi gli effetti di deterioramento superficiale.

SOLUZIONE. Soluzione: Per un cilindro circolare, se indichiamo con $AB=2r$, il suo volume sarà $V=\pi r^2\cdot h$. La sua superficie totale sarà $S_{tot}=2\pi r\cdot h+2\pi r^2=2\pi r\,(h+r)$. Ora ricavando h dal volume $h=\frac{V}{\pi r^2}$ e sostituendolo nella superficie, si ha $S==2\pi r\left(\frac{V+\pi r^3}{\pi r^2}\right)=2\left(\frac{V+\pi r^3}{r}\right)$. Per trovare la condizione di minima superficie, calcoliamo la derivata prima della superficie rispetto al raggio e uguagliamola a zero (assumiamo il volume come costante assegnata).

$$S' = \frac{6\pi r^3-2V-2\pi r^3}{r^2}=0$$

la frazione si annulla se si annulla il suo numeratore; ne segue che $4\pi r^3=2V$, cioè $V=2\pi r^3$. Tale condizione si realizza per il cilindro circolare retto con $AB=BC$, cioè con $h=2r$; infatti in tale caso il volume sarà $V=\pi r^3\cdot2r=2\pi r^3$

Tempo

ESERCIZIO 10. Esprimere la velocità della luce ($3.0 \cdot 10^8\, m/s$) in millimetri al picosecondo.

SOLUZIONE. Sappiamo che $1\, m = 10^3\, mm$ e che $1\, s = 10^{12}\, ps$; si ottiene quindi $c = 3.0 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \cdot \frac{10^3 \frac{mm}{m}}{10^{12} \frac{ps}{s}} = 0.3\, mm/ps$

ESERCIZIO 11. Fermi osservò una volta che la durata normale di una lezione (50 minuti) è molto vicina a 1 microsecolo ($\mu secolo$). Quanto dura un microsecolo in minuti, e qual è in percentuale l'approssimazione dell'approssimazione di Fermi ?

SOLUZIONE. Soluzione: $1\, \mu = 10^{-6}$ per cui $1\, \mu secolo = 10^{-6} \cdot 100\, anni = 10^{-4}\, anni = 10^{-4} \cdot \left(365 \cdot 24 \cdot 60\, \frac{min}{anno}\right) = 52.56\, minuti$. L'approssimazione introdotta è quindi $\frac{50}{52.56} \cdot 100 \simeq 5\%$

ESERCIZIO 12. In un anno vi sono $365,25\, giorni$. A quanti secondi equivalgono.

SOLUZIONE. $365,25 \cdot 24 \cdot 3600 = 31557600\, sec$

ESERCIZIO 13. Un certo orologio a pendolo (con un quadrante di 12 ore) anticipa $1\, \frac{min}{giorno}$. Dopo aver regolato l'orologio al momento attuale, quanto tempo bisogna attendere affinché indichi di nuovo l'ora giusta?

SOLUZIONE. Il quadrante segna solo $12\, ore$, cioè mezza giornata. Il numero dei minuti sul quadrante saranno: $1\, giorno = \frac{24 \cdot 60}{2} = \frac{1440}{2}\, min = 720\, min$. Saranno necessari pertanto $720\, giorni$.

ESERCIZIO 14. Qual è l'età dell'Universo ($5 \cdot 10^{17}\, sec$) in giorni ?

SOLUZIONE. Basta dividere l'età dell'universo per il numero dei secondi di un giorno. $\frac{5 \cdot 10^7}{24 \cdot 3600} = 5.8 \cdot 10^{12}\, giorni$

ESERCIZIO 15. (a) Un'unità di tempo usata talvolta in fisica microscopica è lo *shake*. $1\, shake = 10^{-8}\, sec$. Ci sono più shake in un secondo che secondi in un anno ? (b) L'uomo esiste da circa $10^6\, anni$, mentre l'Universo ha un'età di circa $10^{10}\, anni$. Se si stabilisce che l'età dell'universo è «$1\, giorno$», da quanti «*secondi*» esiste l'umanità ?

SOLUZIONE 16. Caso (a): In un secondo ci sono $10^8\, shake$. In un anno, (cfr. esercizio 13E) vi sono $3.16 \cdot 10^7\, sec$. Quindi $10^8 > 3.16 \cdot 10^7$.

Caso (b): Se $t_{universo} = 1\, giorno$, possiamo impostare la proporzione $10^6 : x = 10^{10} : 1$, da cui si ricava $t_{uomo} = 10^{-4}\, giorni = 10^{-4} \cdot 24 \cdot 3600 = 8.64\, sec$

ESERCIZIO 17. Le velocità massime in km/h di diversi animali sono all'incirca le seguenti: (a) lumaca, $5 \cdot 10^{-2}$; (b) ragno, 2; (c) uomo, 40, e (d) ghepardo, 110. Convertire questi dati in metri al secondo.

SOLUZIONE. Il fattore di trasformazione da $\frac{km}{h} \to \frac{m}{s} = \frac{1}{3.6}$, in quanto $1\, km = 1000\, m$ e $1\, h = 3600\, s$. Si ha quindi $v_{lu} = \frac{5 \cdot 10^{-2}}{3.6} = 0.014\, m/s$; $v_{ra} = \frac{2}{0.36} = 0.56\, m/s$; $v_u = \frac{40}{0.36} = 11.1\, m/s$; $v_{gh} = \frac{110}{0.36} = 30.56\, m/s$.

ESERCIZIO 18. Un'unità astronomica (UA) è la distanza media della Terra dal Sole, pari a circa $1.50 \cdot 10^8\, km$. La velocità della luce è di circa $3 \cdot 10^8\, m/s$. Esprimere la velocità della luce in unità astronomiche al minuto.

SOLUZIONE. Il valore cercato è ottenibile con le opportune «equivalenze». La velocità è il rapporto tra lo spazio percorso e l'intervallo di tempo impiegato. Pertanto: $v_{luce} = c = \frac{3 \cdot 10^5\, km}{1\, s} \cdot \frac{60 \frac{s}{min}}{1.50 \cdot 10^8 \frac{km}{UA}} = 0.12$.

ESERCIZIO 19. Fino al 1883 ogni città o paese degli USA aveva il proprio tempo locale. Oggi i visitatori spostano l'orologio soltanto quando il tempo astronomico locale cambia di $1\, h$. Per quanti gradi di longitudine, in media, si dovrà viaggiare prima di dover nuovamente spostare di $1\, h$ le lancette dell'orologio?

SOLUZIONE. Una rotazione completa della terra si compie in $24h$. La longitudine è l'angolo tra il punto in cui il meridiano di Greenwich e quello in cui il cerchio massimo passante per la località incontrano l'equatore in direzione est o ovest. Quindi, essendo l'angolo sotteso dall'equatore uguale a $360°$, si ha $n_{gradi} = \frac{360}{24} = 15°$.

ESERCIZIO 20. Su due piste differenti, i vincitori di due gare sulla distanza di un miglio hanno fatto registrare $t_1 = 3^{min}58,05^s$ il primo e $t_2 = 3^m58,20^s$ l'altro. Qual è, espresso in piedi, il massimo errore nella misura delle piste che consenta ancora di affermare che il corridore che ha realizzato il tempo minore è stato effettivamente più veloce?

SOLUZIONE. $1\,miglio = 5280\,piedi$. $t_2 - t_1 = 0,15\,s$. $\frac{\Delta t}{t_1} = \frac{0.15\,s}{3\cdot 60+58,05\,s} = 6.30\cdot 10^{-4}$. Si avrà pertanto $\frac{\Delta s}{s} = 6.30\cdot 10^{-4}\cdot 5280\,piedi = 3.3\,piedi$.

Massa

ESERCIZIO 21. Una molecola di acqua (H_2O) contiene due atomi di idrogeno e uno di ossigeno. Un atomo di idrogeno ha massa $1.0u$, uno di ossigeno $16u$, all'incirca. (a) Qual è la massa in kilogrammi di una molecola di acqua? (b) Quante molecole di acqua si trovano negli oceani di tutto il mondo, che hanno una massa totale stimata di $1.4\cdot 10^{21}\,kg$?

SOLUZIONE. Caso (a): Sappiamo che $1\,u = 1,66\cdot 10^{-27}Kg$; inoltre la massa dell'acqua è $18\,u$, per cui $m_{H_2O} = 18u\cdot 1,66\cdot 10^{-27}\frac{Kg}{u} = 2.99\cdot 10^{-26}Kg$

Caso (b): Sapendo la massa totale dell'acqua e quella di una molecola è possibile trovare il numero di molecole $n_{mol} = \frac{1,4\cdot 10^{21}Kg}{2,99\cdot 10^{-26}Kg} = 4,68\cdot 10^{46}$

ESERCIZIO 22. Una persona a dieta può perdere fino a $2.3\,kg$ alla settimana. Esprimere la perdita di massa in milligrammi al secondo.

SOLUZIONE. Sapendo che $1\,kg = 10^6 mg$ e che $1\,settimana = 7\cdot 24\cdot 3600s$, si ha $\frac{2.3\cdot 10^6\,mg}{7\cdot 24\cdot 3600\,s} = 3.80\frac{mg}{s}$.

ESERCIZIO 23. (a) Ammettendo che la densità (massa/volume) dell'acqua sia esattamente di $1\,g/cm^3$, esprimere la densità dell'acqua in kilogrammi al metro cubo. (b) Supponiamo che occorrano $10\,h$ per vuotare un recipiente di $5700\,m^3$di acqua. Qual è la «portata massima», in kilogrammi di acqua scaricata al secondo?

SOLUZIONE. Caso (a): La densità è una grandezza che descrive la distribuzione media della massa nel volume di un corpo. Poiché $1\,kg = 1000\,g$ e $1\,m^3 = 10^6\,cm^3$, si ha $d_{H_2O} = \frac{10^6\,g}{1\,m^3} = \frac{10^3\,kg}{1\,m^3} = 1000\,kg/m^3$

Caso (b): Per risolvere questo quesito serve ricordare che un volume di $1\,litro_{H_2O}$ ha una massa di $1\,kg$ e che $1\,m^3_{H_2O} = 1000\,litri$. Pertanto la massa di $5700\,m^3$ è di $5,7\cdot 10^6\,Kg$ e la portata sarà: $\frac{5.7\cdot 10^6\,kg}{10\cdot 3600\,s} = 158\,kg/s$.

ESERCIZIO 24. La densità del ferro è $7.87\,g/cm^3$, e la massa di un atomo di ferro è $9.27\cdot 10^{-26}\,kg$. Se gli atomi sono sferici e ben impaccati (a) qual è il volume di un atomo di ferro?, e (b) qual è la distanza fra i centri di atomi adiacenti ?

SOLUZIONE. Caso (a): La densità è il rapporto tra la massa e il volume; si ha $V = \frac{M}{d} = \frac{9.27\cdot 10^{-26}\,kg}{7870\,kg/m^3} = 1.18\cdot 10^{-29}\,m^3$; il volume di una sfera è $V = \frac{4\pi r^3}{3}$, da cui si ricava che $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$, sostituendo i valori delle grandezze si ha $r = \sqrt[3]{\frac{3\cdot 1.18\cdot 10^{-29}}{4\pi}} = 1.41\cdot 10^{-20}\,m$; si ricava che la distanza minima tra i due centri è uguale al diametro dell'atomo pari a $d_{c1-c2} = 2.82\cdot 10^{-20}\,m$.